

Über psychische und physikalische Zeit

Harald Rieder

1. März 2021

Inhaltsverzeichnis

Motivation	1
Idee zu einer Quantenuhr	3
Eine Quantenuhr aus 2 Qutrits	4
Wachsen der Entropie mit der psychischen Zeit	8
Mehr Raumdimensionen	9
Eine relativbewegte Quantenuhr	10
Fazit	12
Anhang A: Berechnung der Matrixelemente von U	13
Anhang B: Schrödinger-Dynamik der Entropie	13
Anhang C: Beispiel zur Schrödingerdynamik der Entropie	15
Anhang D: Matrixelemente zweier Lorentz-Boosts	17
Anhang E: Gnu Octave Programme	18
Quantenuhr aus 2 Qutrits	18
Schrödingerdynamik Entropie	19

Motivation

Mit dem, was man sich hinter dem Begriff *Zeit* eigentlich vorzustellen habe, hat die Menschheit im Jahr 2021 ein gewaltiges Problem. Die, die meinen, die Sache sei klar, haben zwar kein Problem, dafür aber auch noch nichts verstanden. Die, die tiefer nachgedacht haben, sind sich uneins, nachzulesen zum Beispiel im Quanta Magazine in *A Debate Over the Physics of Time*. Einen kurzen historischen Abriss enthält der Artikel *The Origin Of Time in Conscious Agents* von Donald D. Hoffman. Und er meint, dass Zeit etwas mit Geist zu tun haben müsse. Dass Zeit

in Bezug auf die Physik etwas mit Quantenverschränkung zu tun haben könnte, wird zumindest erahnt, zum Beispiel im Artikel *Time from Quantum Entanglement*. Gerade die Physik aber stellt uns heute vor das sogenannte *Problem of Time*,

Dieser Artikel stellt sich auf den Standpunkt, dass Zeit nicht unter Ausblendung des Geistes verstanden werden kann. Ausgehend von bekanntem physikalischen Terrain tastet er sich hinaus in's Unbekannte mit Hilfe einer postulierten Quantendynamik, die die Schnittstelle zum Geist beinhalten soll. Diese Dynamik ist eben eine Quantendynamik ohne Schrödingerdynamik, eine reine „Kollaps“-Dynamik, und damit gewissermaßen das Gegenteil der Viele-Welten-Interpretation.

Der Erfolg der relativistischen Physik lehrt uns, dass die Zeit irgendwie gleichrangig neben dem Ort zu stehen hat. Wechselt ein Beobachter seine Perspektive auf bestimmte Art, sehen Koordinaten, die zuvor wie reine Ortskoordinaten ausgesehen haben, plötzlich ein wenig wie Zeitkoordinaten aus, und umgekehrt. Ein solcher Perspektiv-Wechsel heißt in der speziellen Relativitätstheorie *Lorentz-Transformation*.¹

Der Alltag prägt in uns die Vorstellung, dass Zeit kontinuierlich vergeht, und zwar in eine bestimmte Richtung. Denn das Alltagsgeschehen scheint sich meistens nicht umkehren zu lassen. Eine zerschellte Tasse setzt sich nicht mit der Zeit wieder zu einer heilen Tasse zusammen und kehrt unter Abkühlung auf den Tisch zurück. Solches Alltagsgeschehen wird durch den 2. Hauptsatz der Thermodynamik modelliert.

Der Erfolg der Physik insgesamt lehrt uns, dass Ortsraum keine eingebaute Richtung hat. Es gibt keinen Satz der behauptet, dass wenn man in eine bestimmte Richtung geht, die Tassen immer kaputter werden müssen.

Somit haben wir 3 erfolgreich anwendbare Konzepte, die im Widerspruch zu stehen scheinen. Raum und Zeit sind wie Bruder und Schwester. Die Zeit hat eine eingebaute Richtung und vergeht von selbst, der Raum aber nicht. Und nun?

Darum schauen wir uns an, wozu uns ein paar unkonventionelle Annahmen führen können:

- In der Physik vergeht keine Zeit. Die Natur der physikalischen Zeit ist wie die Natur des physikalischen Ortsraums.²
- In der Psyche vergeht Zeit. Sie ist integraler Bestandteil des Bewusstwerdens, des Geistes.
- Es muss einen Mechanismus geben, der die psychische Zeit mit einem Bestandteil der physikalischen Welt so koppelt, dass es wenigstens für die menschliche Psyche den Anschein hat, die physikalische Zeit würde objektiv vergehen.

¹Ein Beispiel aus der allgemeinen Relativitätstheorie: Beim Passieren des Ereignishorizontes der Schwarzschild-Metrik tauschen Radialterm und Zeitterm ihre Vorzeichen aus.

²Genau genommen betrachtet dieser Artikel Raumzeit als emergentes Phänomen. Wie jegliche Bedeutung entsteht auch die Bedeutung „Raumzeit“ erst in einem Empfänger von Information. Letztere allerdings sieht dieser Artikel als physikalisch an.

Idee zu einer Quantenuhr

In der Quantenmechanik spielt sich das Geschehen in einem vieldimensionalen Konfigurationsraum ab, dem Hilbert-Raum³. Ein Ort existiert in diesem Raum zunächst nicht. Erst durch Festlegung auf eine Basis lassen sich komplexwertige Funktionen erstellen. Diese Funktionen stehen für unendlich viele Amplituden, die durch einen kontinuierlichen reellwertigen Index x durchnummeriert werden.

Durch Beobachtung von außen, sowie durch Symmetrien, die wir aus der Erfahrung her einem dreidimensionalen Ortsraum zuschreiben, gelingt uns der Anschluss. Es sind unendlich viele Basen wählbar, doch nur bestimmte Wahlen führen zu einer Indexierung, bei der wir den Index als Ortskoordinate interpretieren können. Die Amplitude eines abstrakten Zustandsvektors $|\psi\rangle$ an einem bestimmten Ort liefert uns das Skalarprodukt mit dem abstrakten Vektor einer „Ortsbasis“

$$\psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle \quad (1)$$

Wenn wir die physikalische Zeit ähnlich wie den Ort behandeln wollen, dann muss die Zeitkoordinate t ebenso ein reellwertiger kontinuierlicher Index sein. Das heißt

$$\psi(t, x) \equiv \langle t, x|\psi\rangle \quad (2)$$

Die Indizes x und t nummerieren nun zusammen eine Produktbasis aus Orts- und Zeiteigenvektoren. Wir könnten aufgrund der Gleichmächtigkeit⁴ von \mathbb{R} mit \mathbb{R}^2 diesen Index durch einen gemeinsamen reellwertigen Index $s = s(x, t)$ ersetzen und kämen damit wieder auf die Form

$$\psi(s) \equiv \langle s|\psi\rangle \quad (3)$$

wobei $|\psi\rangle$ wie in (2) der abstrakte Zustandsvektor im Produktraum wäre.

Wir nehmen an, dass der Beobachter aus seinem Hilbert-Raum \mathcal{H}_X heraus nicht in der Lage dazu ist, physikalische Zeit „direkt“ in Erfahrung zu bringen. Diese Annahme drückt sich in der Quantenmechanik so aus, dass in Matrixelementen $H(X, x)$ von Wechselwirkungs-Hamiltonians die Zeit nicht auftritt. Ein Beobachter muss eine Zeigerstellung, einen Ort, ablesen, um von dort auf die Zeit im Uhrenzustand zu schließen.

Ein guter Uhrenzustand kann also ein Zustandsvektor im Produktraum $\mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}_t$ sein, der Orts- und Zeitunterräume maximal verschränkt. Wenn $\delta(x-\xi)$ die Amplituden von Ortseigenvektoren im Ortsunterraum in der Ortsdarstellung sind, und $\delta(t-\tau)$ die Amplituden von Zeiteigenvektoren im Zeitunterraum in der Zeitdarstellung, dann sind⁵

$$\psi(t, x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} d\chi \delta(t-\chi)\delta(x-\chi) = \delta(t-x) \quad (4)$$

die Amplituden eines maximal verschränkten Zustands, der aus der Beobachtung von ξ sicher auf die Zeit τ schließen lässt. Durch die Beobachtung (oder Messung) „kollabiert die Überlagerung“

$$\int d\chi \delta(t-\chi)\delta(x-\chi) \rightarrow \delta(t-\chi)\delta(x-\chi) \quad (5)$$

³Feinheiten wie Rigged Hilbert Space oder Fock-Raum interessieren in diesem Zusammenhang noch nicht.

⁴Das ist die Mächtigkeit des Kontinuums.

⁵Fortan lassen wir die Integralgrenzen weg, wenn sie im Unendlichen liegen.

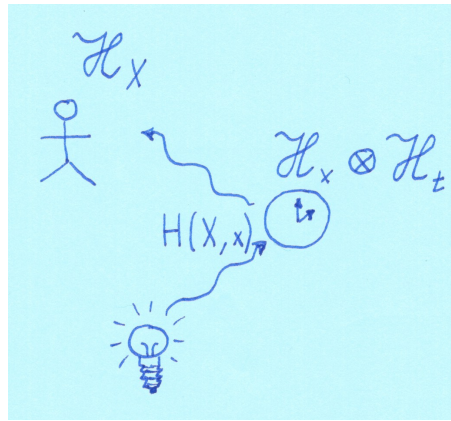


Abbildung 1: Indirektes Ablesen der Uhrzeit

Dadurch ist die Uhr zunächst kaputtgegangen. Denn durch verträgliche Messungen, also wiederholte Ortsmessungen, werden wir immer wieder nur diesen Zustand und damit die Zeit x antreffen. Es fehlt also ein Mechanismus, der die Uhr wieder scharfschaltet, sie in ihren verschränkten Zustand zurückbringt.

Im Artikel *Ideas about a Quantum Theory without Process Type 2* wird so ein Mechanismus vorgestellt. Dort wird postuliert, dass jeder bewusste Beobachter einerseits eine Teilung des Hilbertraums vornimmt, andererseits die Änderung der Verschränkungen, wie sie erst durch die jeweilige Teilung aus den jeweils vorliegenden Zustandsvektoren entstehen, bewusst erlebt, ja sie womöglich willentlich herbeiführen kann, wodurch dann *aus Sicht des jeweiligen Beobachters* die quantenmechanische Überlagerung kollabiert und am Ende ein reiner Produktzustand vorliegt. Mindestens 2 solcherart an den physikalischen Kanal angeschlossene Beobachter (*conscious splits*) sind notwendig, um ein Geschehen am Laufen zu halten. Unsere Uhr soll von einem äußeren Beobachter wie gezeigt hin und wieder abgelesen werden. Wir benötigen also noch einen weiteren „internen“ Beobachter, der den x,t -Produkttraum auf andere Weise teilen muss als der externe Beobachter. Der interne Beobachter teilt den Produkttraum dazu nicht in x - und t -Basen, sondern in eine Basis aus x,t -verschränkten Zuständen und eine Basis, die den ganzen Rest enthält.

Um zu sehen, wie es läuft, betrachten wir ein einfaches Beispiel...

Eine Quantenuhr aus 2 Qutrits

Unsere einfache Quantenuhr soll nur 3 diskrete Zeigerstellungen haben: $|x = 0\rangle, |x = 1\rangle, |x = 2\rangle$. Sie soll auch nur 3 Zeitpunkte messen können: $|t = 0\rangle, |t = 1\rangle, |t = 2\rangle$. Wir lassen später der Übersichtlichkeit halber x und t weg, x soll links stehen, t rechts. Das heißt zum Beispiel $|00\rangle$ soll für $|x = 0\rangle |t = 0\rangle$ stehen.

Wir haben es mit einem Produkttraum aus 2 Qutrits, 1 Raum- und 1 Zeit-Qutrit zu tun. Für eine Orthogonalbasis sind somit 9 Basisvektoren notwendig. Wir bilden diese aus den Produkten der 3 Raum- und 3 Zeit-Eigenvektoren.

Einen x,t-verschränkten Zustand können wir zum Beispiel so bilden

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|x=0\rangle \otimes |t=0\rangle + |x=1\rangle \otimes |t=1\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 00 \\ 01 \\ 02 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \end{matrix}$$

und einen unverschränkten Zustand so

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |x=1\rangle \otimes (|t=0\rangle + |t=2\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |12\rangle) \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 00 \\ 01 \\ 02 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \end{matrix}$$

Dies ist die Perspektive des äußeren Beobachters. Die Uhr soll ihm verschränkte Zustände anbieten, die aus Linearkombinationen von $|\chi\chi\rangle$ Vektoren zusammengesetzt sind. Er entscheidet sich dann für einen der Vektoren mit einer Wahrscheinlichkeit gemäß der Bornschen Regel.

Daraufhin muss die Uhr wieder scharfgeschaltet werden, wozu wir den internen Beobachter brauchen. Für den internen Beobachter müssen alle $|\chi\chi\rangle_{ext}$ Zustände verschränkt aussehen, damit er tätig wird. Um auf seine Perspektive zu wechseln, brauchen wir eine unitäre Matrix U im Produktraum, zum Beispiel⁶

$$U = \begin{pmatrix} a_0 & & & a_2 & & a_1 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ a_1 & & & a_0 & & a_2 \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \\ a_2 & & & a_1 & & & a_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 00 \\ 01 \\ 02 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \end{matrix} \quad (6)$$

Die komplexen Werte a_0, a_1, a_2 an den Stellen, die für x,t-Verschränkung stehen, rotieren ihre Plätze in den 3 betroffenen Spaltenvektoren und ebenfalls in den betroffenen Zeilenvektoren. Die Werte sind geeignet zu wählen, worauf wir noch kommen werden.

⁶Elemente mit Wert 0 lassen wir der Übersichtlichkeit halber nun öfter weg.

mit denen der externe Beobachter einen bestimmten x,t-verschränkten Zustand nach dem Tick beobachtet in Abhängigkeit des Zustands vor dem Tick.

Wir wählen nun konkrete Zahlenwerte für die Uhr. Im Anhang wird gezeigt, wie man auf geeignete Werte kommt.

$$a_0 = N \frac{\sin(\alpha_0 + \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 - 2\alpha_0)} e^{i\alpha_0} \quad a_1 = N \frac{\sin(\alpha_0 + \alpha_1)}{\sin(\alpha_0 - 2\alpha_1)} e^{i\alpha_1} \quad a_2 = N$$

mit

$$N = \left(1 + \frac{\sin^2(\alpha_0 + \alpha_1)}{\sin^2(\alpha_1 - 2\alpha_0)} + \frac{\sin^2(\alpha_0 + \alpha_1)}{\sin^2(\alpha_0 - 2\alpha_1)} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Und wir wählen die Winkel zu

$$\alpha_0 = \pi/6 \quad \alpha_1 = \pi/5$$

Damit werden

$$P \approx \begin{pmatrix} & 0.63787 & 0.12644 & 0.23569 \\ & 0.23569 & 0.63787 & 0.12644 \\ & 0.12644 & 0.23569 & 0.63787 \\ 0.63787 & 0.12644 & 0.23569 & \\ 0.23569 & 0.63787 & 0.12644 & \\ 0.12644 & 0.23569 & 0.63787 & \end{pmatrix} \begin{matrix} 00_{ext} \\ 11_{ext} \\ 22_{ext} \\ 00_{int} \\ 11_{int} \\ 22_{int} \end{matrix}$$

und

$$Q = P^2 \approx \begin{pmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0.47841 & 0.26079 & 0.26079 & & & & \\ 0.26079 & 0.47841 & 0.26079 & & & & \\ 0.26079 & 0.26079 & 0.47841 & & & & \\ & & & 0.47841 & 0.26079 & 0.26079 & \\ & & & 0.26079 & 0.47841 & 0.26079 & \\ & & & 0.26079 & 0.26079 & 0.47841 & \end{pmatrix} \begin{matrix} 00_{ext} \\ 11_{ext} \\ 22_{ext} \\ 00_{int} \\ 11_{int} \\ 22_{int} \end{matrix}$$

Erwartungswerte für die beobachtete Zeit können wir so bilden

$$\langle t \rangle = t \cdot Q \cdot \psi \quad t = (0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0)$$

In unserem Beispiel ergeben sich in Abhängigkeit des Ausgangszustands die Erwartungswerte

ψ	$\langle t \rangle$
$ 00\rangle_{ext}$	0.78
$ 11\rangle_{ext}$	1.00
$ 22\rangle_{ext}$	1.22

Eine makroskopische Uhr, die über viele Quantenuhren mittelte, würde uns diese Zeitwerte liefern. Ausgehend von $t=0$ liefere die gemessene Zeit schon einmal vorwärts! Könnten wir mit sehr großen Matrizen U hantieren, dann könnten wir womöglich große Bereiche schaffen, in denen die Zeit, besser gesagt die Größe, die der externe Beobachter als Zeit interpretiert, mit jedem psychischen Tick in dieselbe Richtung liefere.

Größere doppelt-stochastische Matrizen mögen sich zu diesem Zweck noch leicht zurechtlegen lassen. Allerdings ist die Frage, ob sie auch unistochastisch sind, ab einer Zeilenzahl von 5 und dem heutigen Stand der Forschung leider kaum beantwortbar. Unistochastisch müssen sie aber sein, wenn sie mit der Quantenmechanik verträglich sein sollen.

Wachsen der Entropie mit der psychischen Zeit

Doppelt-stochastische Übergangsmatrizen in Markov-Prozessen führen im Limes zu einer Gleichverteilung der Wahrscheinlichkeiten. Doch was bedeutet das in unserem Zusammenhang?

Wir nehmen an, dass eine Beobachterin A im Hilbert-Raum \mathcal{H}_Y das System der Abbildung 1 sozusagen von ganz außen beobachtet. Die Beobachterin wechselwirkt mit ihren eigenen

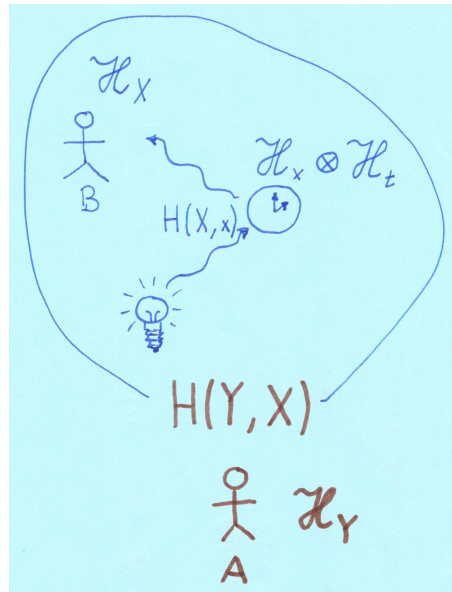


Abbildung 2: Ganz äußere Beobachterin

Uhren und erlebt dadurch ein Fortschreiten ihrer Zeit. Von Zeit zu Zeit koppelt sie sich mit einem Wechselwirkungs-Hamiltonian $H(Y, X)$ an den Beobachter B, um ihn nach seiner Zeit zu fragen. Wenn B antwortet, dass er χ gemessen habe, dann weiß sie, dass das System im Zustand ⁸

$$|X = \chi\rangle \otimes |\chi\chi\rangle \quad (10)$$

ist - oder gerade noch gewesen ist. Die Abfrage der Zeit von B durch A ist natürlich auch ein Quantenprozess. Wir können ihn uns als Dekohärenz-Prozess im Grenzfall einer Quantenmessung vorstellen. Das heißt, wenn B „das Wissen χ “ erlangt hat, soll im Idealfall der Gesamtzustand

$$|\Theta\rangle = |Y = \chi\rangle \otimes |X = \chi\rangle \otimes |\chi\chi\rangle \quad (11)$$

vorliegen.⁹ Dieser reine Zustand hat die Entropie 0. Formal können wir den Dichteoperator $\hat{\rho}$ des Systems durch Ausspuren der Freiheitsgrade von Y bilden

$$\hat{\rho}_{\chi, \chi\chi} = \text{Spur}_Y |\Theta\rangle \langle \Theta| = |X = \chi\rangle \otimes |\chi\chi\rangle \langle \chi\chi| \otimes \langle X = \chi| \quad (12)$$

und erhalten für dessen von-Neumann-Entropie

$$S = -\text{Spur} \hat{\rho}_{\chi, \chi\chi} \log_2 \hat{\rho}_{\chi, \chi\chi} = 0 \quad (13)$$

⁸Hier verwenden wir ab und zu \otimes zur Kennzeichnung des dyadischen Produkts, damit klarer wird, was gemeint ist.

⁹Bei makroskopischen Beobachtern müssen wir uns die Unterräume von \mathcal{H}_Y und \mathcal{H}_X zum Messwert χ stark entartet denken.

Bis zur nächsten Abfrage sollen τ Ticks im System vergehen. Die Matrix Q wirkt bei jedem Tick, so dass nach τ Ticks die Wahrscheinlichkeiten für die Endzustände

$$p_i = \sum_j \{Q^\tau\}_{ij} \delta_{j\chi} \quad (14)$$

sind. Nun haben wir aus Sicht von B ein Gemisch im System vorliegen

$$\hat{\rho}_{X,xt} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i |X=i\rangle \otimes |ii\rangle \langle ii| \otimes \langle X=i| \quad (15)$$

n soll für die endliche Mächtigkeit des Hilbertraums des Systems stehen. Im Limes $\tau \rightarrow \infty$ streben die p_i nach demselben Wert $p_\infty = n^{-1}$, was die Maximierung der von-Neumann-Entropie des Systems bedeutet. Mit den Matrixelementen von $\hat{\rho}_{X,xt}$ ausgedrückt

$$S_\infty = -\text{Spur} \left(\begin{pmatrix} p_\infty & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_\infty & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_\infty \end{pmatrix} \log_2 \begin{pmatrix} p_\infty & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_\infty & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_\infty \end{pmatrix} \right) = -n \cdot n^{-1} \log_2 n^{-1} = \log_2 n \quad (16)$$

Nun kommen wir zurück auf unser einfaches Beispiel und sehen nach, wie sich dort die Wahrscheinlichkeiten für die Endzustände nach einem Anfangszustand $|00\rangle$ entwickeln.¹⁰

τ	1	2	3	...	∞
p_0	0.47841	0.36491	0.34020	...	1/3
p_1	0.26079	0.31755	0.32990	...	1/3
p_2	0.26079	0.31755	0.32990	...	1/3

Durch den Verzicht auf quantenmechanische Prozesse des Typs 2, das heißt durch die Beschränkung auf unistochastische Prozesse des Typs 1, erhalten wir mit dem Anwachsen der Zeit zunehmend gemischtere Zustände. Wir bekommen eine Richtung in der psychischen Zeit, in der die Entropie wächst, ohne dass die physikalische Koordinate t dafür eine Richtung bekommen musste. Bei Prozessen des Typs 2, der Schrödinger-Dynamik, hängt die Entropie quasiperiodisch von der (physikalischen) Zeit ab.¹¹

Mehr Raumdimensionen

Es stellt sich die Frage, wie ein x,t -verschränkter Zustand der Art (4) auf mehr kontinuierliche Raumdimensionen erweitert werden muss. Die Antwort findet sich ausgehend von einem Beispiel im diskreten Hilbertraum.

t	x	y	z	s
$ t=0\rangle$	$ x=0\rangle$	$ y=0\rangle$	$ z=2\rangle$	$ s=0\rangle$
$ t=1\rangle$	$ x=0\rangle$	$ y=1\rangle$	$ z=3\rangle$	$ s=1\rangle$
$ t=2\rangle$	$ x=1\rangle$	$ y=2\rangle$	$ z=4\rangle$	$ s=2\rangle$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

¹⁰Programm-Code findet sich im Anhang.

¹¹Siehe Anhang.

Nach einer Umindexierung $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto s$ entspricht s einem Bahnparameter. Die Verallgemeinerung von (4) ist also ein Zustand der Art (3) $\delta(t-s)$, bei der s einen Bahnparameter darstellt.

Formal lässt sich mit der Wahl $t(s) = s$ schreiben

$$\psi(t, x, y, z) \sim \int ds \delta(t-s) \delta(x-x(s)) \delta(y-y(s)) \delta(z-z(s)) = \delta(x-x(t)) \delta(y-y(t)) \delta(z-z(t)) \hat{=} \delta(t-s(x, y, z)) \quad (17)$$

Jede Weltlinie, die sich bei Projektion auf den dreidimensionalen Ortsraum nicht selbst schneidet, ist ein guter Uhrenzustand.

Eine relativbewegte Quantenuhr

Wir fragen nun danach, wie eine bewegte Uhr gesehen wird, oder gleichwertig, wie eine Uhr von einem bewegten Beobachter aus gesehen wird.

Der Operator \hat{U} transformiert von der Sicht des externen Beobachters auf die Sicht des internen Beobachters. Der Operator \hat{U}^{-1} transformiert wieder zurück.

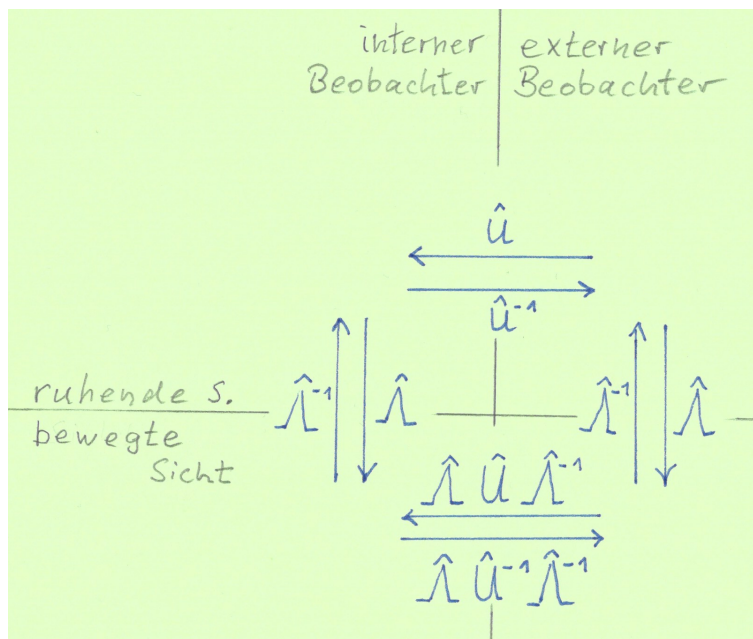


Abbildung 3: Vier verschiedene Sichten auf einen Zustand

Ein Lorentz-Boost in x-Richtung $\hat{\Lambda}_\beta$, parametrisiert mit der Geschwindigkeit $\beta = v/c$ transformiert Zustände¹² auf die Sicht eines bewegten Beobachters. Die Umkehrtransformation ist $\hat{\Lambda}_{-\beta} \equiv \hat{\Lambda}_\beta^{-1}$.

Aus der Abbildung 3 lesen wir ab, wie der bewegte Beobachter die Beziehung zwischen externem und internem Beobachter sieht: sie wird durch den linearen Operator $\hat{V} = \hat{\Lambda} \hat{U} \hat{\Lambda}^{-1}$ bestimmt. Der bewegte Beobachter sieht im Allgemeinen also die Beziehung zwischen internem

¹²Wir beschränken uns hier auf skalare ψ .

und externem Beobachter anders als ein ruhender Beobachter. Nur wenn $\hat{\Lambda}$ und \hat{U} vertauschen würden, erschiene die Beziehung gleich. Wie wir oben gesehen haben, bestimmt diese Beziehung das Fortschreiten der physikalischen Zeit mit den psychischen Zeit-Ticks. Der bewegte Beobachter sieht also subjektiv im Allgemeinen ein anderes Fortschreiten von physikalischer Zeit mit den psychischen, objektiven Zeit-Ticks des ruhenden externen Beobachters.

Ein Lorentz-Boost in x-Richtung transformiert die Koordinaten gemäß

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Aus der Forderung

$$|\psi'\rangle = \hat{\Lambda} |\psi\rangle$$

ausgedrückt in Komponenten

$$\psi'(t', x') = \psi'(\gamma(t - \beta x), \gamma(x - \beta t)) = \int dt dx \Lambda(t', x', t, x) \psi(t, x)$$

lesen wir die Matrixelemente der Lorentztransformation ab zu

$$\Lambda_\beta(t', x', t, x) = \delta(t - \gamma(t' + \beta x')) \delta(x - \gamma(x' + \beta t')) \quad (18)$$

Diese Matrixelemente geben auch die Verkettung von Boosts

$$\gamma_3 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_3 \\ -\beta_3 & 1 \end{pmatrix} = \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & 1 \end{pmatrix} \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\beta_1 & 1 \end{pmatrix}$$

richtig wieder. Es ist ¹³

$$\Lambda_{\beta_3}(t', x', t, x) = \int dt'' dx'' \Lambda_{\beta_2}(t', x', t'', x'') \Lambda_{\beta_1}(t'', x'', t, x) \quad (19)$$

Mit Hilfe von (18) können wir die Matrixelemente von \hat{U} aus Sicht des bewegten Beobachters angeben.

$$V(t'_{int}, x'_{int}, t'_{ext}, x'_{ext}) = \int dt''_{int} dx''_{int} dt''_{ext} dx''_{ext} \Lambda_\beta(t'_{int}, x'_{int}, t''_{int}, x''_{int}) U(t''_{int}, x''_{int}, t''_{ext}, x''_{ext}) \Lambda_{-\beta}(t''_{ext}, x''_{ext}, t_{ext}, x_{ext}) \quad (20)$$

Wie zu erwarten war, ergibt sich nach Einsetzen von (18)

$$V(t'_{int}, x'_{int}, t'_{ext}, x'_{ext}) = U(\gamma(t'_{int} - \beta x'_{int}), \gamma(x'_{int} - \beta t'_{int}), \gamma(t'_{ext} - \beta x'_{ext}), \gamma(x'_{ext} - \beta t'_{ext})) \quad (21)$$

Die Matrixelemente von \hat{U} wären dann invariant unter Lorentz-Boosts, wenn sie nur von den invarianten Skalaren $\sqrt{t_{int}^2 - x_{int}^2}$ und $\sqrt{t_{ext}^2 - x_{ext}^2}$ abhängig wären. Die Matrizen (6), die uns ein Anwachsen der Entropie mit der Zeit erklären konnten, sehen danach nicht aus¹⁴. An dieser Stelle kann man also die Hoffnung hegen, Lorentz-variante \hat{U} zu finden, die sowohl ein Anwachsen der Entropie mit der Zeit als auch ein Zusammenbrechen des Uhrenprozesses bei $\beta = 1$ erklären könnten.

¹³Im Anhang.

¹⁴einmal abgesehen davon, dass sie diskret und nicht kontinuierlich sind

Fazit

Während *Ideas about a Quantum Theory without Process Type 2* den Weg aufgezeigt hat, wie aus einer „Kollaps“-Dynamik näherungsweise eine Schrödingerdynamik entstehen kann, hat dieser Artikel gezeigt, wie bei anderem *relativen* Arrangement der geistigen Akteure eine stochastische Dynamik entstehen kann, bei der Zeit- und Entropiewerte gemeinsam wachsen. Während sonst versucht wird¹⁵, mit Hilfe einer subjektiven Grobkörnigkeit ein Anwachsen von Entropie zu erklären, erklärt der hiesige Ansatz das Anwachsen der Entropie auf elementarer Ebene, sozusagen auf Ebene einer Feinkörnigkeit, die wir vermutlich auf der Planck-Skala zu suchen haben.

Ein Ausblick wurde gegeben, wie man vielleicht ohne die allgemeine Relativitätstheorie bemühen zu müssen, einen Zusammenhang zwischen einer Feinkörnigkeit und der Grenzgeschwindigkeit β für die Informationsausbreitung finden könnte. Eine Herausforderung wird dabei sein, das mathematische Gerüst der Relativitätstheorie, das auf der Bühne eines Kontinuums steht, zu verbinden mit einer Theorie diskreter Informationseinheiten.

¹⁵Siehe z.B. *Classical dynamical coarse-grained entropy and comparison with the quantum version* aus dem Jahr 2020.

Anhang A: Berechnung der Matrixelemente von U

Wir kümmern uns hier nur um die a_i und stauchen U auf eine 3x3-Matrix zusammen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann eines der Elemente reell gewählt werden. Wir machen den Ansatz

$$U = N \begin{pmatrix} r_0 e^{i\alpha_0} & 1 & r_1 e^{i\alpha_1} \\ r_1 e^{i\alpha_1} & r_0 e^{i\alpha_0} & 1 \\ 1 & r_1 e^{i\alpha_1} & r_0 e^{i\alpha_0} \end{pmatrix} \quad N, r_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$$

N ist eine noch zu bestimmende Normierungskonstante. Damit die Spaltenvektoren paarweise orthogonal sind, muss gelten

$$r_0 e^{i\alpha_0} + r_0 r_1 e^{i(\alpha_1 - \alpha_0)} + r_1 e^{-i\alpha_1} = 0$$

und damit

$$r_0 = -\frac{r_1 e^{-i\alpha_1}}{e^{i\alpha_0} + r_1 e^{i(\alpha_1 - \alpha_0)}}$$

Gemäß Voraussetzung muss diese Größe reell sein. Wenn wir mit dem konjugiert komplexen Nenner erweitern wird der Nenner reell und der Zähler wird zu

$$-r_1 (e^{-i(\alpha_0 + \alpha_1)} + r_1 e^{i(\alpha_0 - 2\alpha_1)})$$

Damit dieser Term reell wird, muss sein

$$r_1 = \frac{\sin(\alpha_0 + \alpha_1)}{\sin(\alpha_0 - 2\alpha_1)}$$

Entsprechend kommt man auf

$$r_0 = \frac{\sin(\alpha_0 + \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 - 2\alpha_0)}$$

und damit für die Normierungskonstante auf

$$N = \left(1 + \frac{\sin^2(\alpha_0 + \alpha_1)}{\sin^2(\alpha_1 - 2\alpha_0)} + \frac{\sin^2(\alpha_0 + \alpha_1)}{\sin^2(\alpha_0 - 2\alpha_1)} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Anhang B: Schrödinger-Dynamik der Entropie

Es sei \hat{H} der Gesamt-Hamiltonoperator der Quantenwelt. Dann ist ihr unitärer Zeitentwicklungsoperator, der Zustände von der Zeit t_0 zur Zeit t transportiert

$$\hat{T} = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} \quad (22)$$

In unserer Quanten-Gesamtwelt sollte es keine explizite, also klassisch von außen aufgeprägte Abhängigkeit des Hamilton-Operators geben. Würde man in der Gesamtwelt auf so eine Abhängigkeit stoßen, so müsste man die Theorie modifizieren, um diese Dynamik einzuschließen.

Ein Gemisch für die Gesamtwelt sollte ebenfalls nicht vorliegen. Eine Verschränkung nach außerhalb kann es per Definition nicht geben, denn wir wollen die Gesamtwelt betrachten. Gäbe

es anfangs ein Gemisch, wobei eine Entstehung durch klassisches „Würfeln“ wieder auszuschließen wäre, so würde nach irgendeiner vollständigen „Messung“ sofort ein reiner Zustand vorliegen und nach der Schrödinger-Dynamik für immer rein bleiben.

Wir betrachten also die Zeitentwicklung der von-Neumann-Entropie eines reinen Gesamtzustands $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$. Dieser Zustand lässt sich nach einer beliebigen Orthonormalbasis entwickeln. Wir nehmen dazu die Basis $\{|E_i\rangle\}$ der Eigenvektoren von \hat{H} zu den Eigenwerten E_i .

$$|\psi\rangle = \sum_i d_i |E_i\rangle \quad \hat{\rho} = \sum_{ij} d_i d_j^* |E_i\rangle\langle E_j| \quad (23)$$

Dieser reine Zustand bekommt Entropie und Verschränkung durch eine gedachte Zweiteilung des Gesamtraums in die mit X und Y bezeichneten Teilräume $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X \otimes \mathcal{H}_Y$.

Sei $\{|\phi_i\rangle\}$ eine Basis in \mathcal{H}_X und $\{|\chi_j\rangle\}$ eine Basis in \mathcal{H}_Y . Der Gesamtzustand lässt sich nach der Produktbasis $\{|\phi_i\rangle|\chi_j\rangle\}$ entwickeln.

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |\phi_i\rangle|\chi_j\rangle \quad \hat{\rho} = \sum_{ijkl} c_{ij} c_{kl}^* |\phi_i\rangle|\chi_j\rangle\langle\phi_k|\langle\chi_l| \quad (24)$$

Auch jeder Energieeigenvektor lässt sich nach dieser (oder jeder anderen) Produktbasis entwickeln

$$|E_i\rangle = \sum_{jk} f_{ijk} |\phi_j\rangle|\chi_k\rangle \quad \langle E_i| = \sum_{jk} f_{ijk}^* \langle\phi_j|\langle\chi_k| \quad (25)$$

Der Gesamtzustand (23)/(24) soll sich nach der Schrödinger-Dynamik (22) entwickeln

$$\hat{\rho}(\Delta t) = \sum_{ij} d_i d_j^* \hat{T} |E_i\rangle\langle E_j| \hat{T}^\dagger = \sum_{ij} d_i d_j^* e^{-i\Delta\omega_{ij}\Delta t} |E_i\rangle\langle E_j| \quad (26)$$

wobei wir die Abkürzungen $\Delta t := t - t_0$ und $\Delta\omega_{ij} := \frac{E_i - E_j}{\hbar}$ eingeführt haben. Setzen wir die Entwicklung (25) nach der Produktbasis ein, dann wird (26) zu

$$\hat{\rho}(\Delta t) = \sum_{ijklmn} d_i d_j^* e^{-i\Delta\omega_{ij}\Delta t} f_{ikl} f_{jmn}^* |\phi_k\rangle|\chi_l\rangle\langle\phi_m|\langle\chi_n|$$

Zur Berechnung der von-Neumann-Entropie brauchen wir zunächst den Dichteoperator eines Teils und berechnen die Entropie danach durch Spurbildung über das andere Teil.¹⁶

Dieser Punkt ist ontologisch durchaus wichtig. Die Verschränkungs-Entropie ist eine Eigenschaft der Beziehung zwischen Teilen und kann keinem Teil alleine zugeschrieben werden, während man die Entropie der klassischen Thermodynamik einem Teil, einem „abgeschlossenen System“ zuschreibt und sie als extensive, mit dem Volumen wachsende Größe ansieht. Auch die Entropie schwarzer Löcher sieht man Stand 2021 überwiegend als Eigenschaft eines Teils, des schwarzen Lochs, an und nicht als Eigenschaft der Beziehung zwischen schwarzem Loch und Restwelt, und das obwohl das Anwachsen der Entropie mit der Fläche am Ereignishorizont ein deutlicher Hinweis auf eine Beziehungsentropie ist. Bei ungleicher Teilung in einen kleinen Raum X und einen großen Raum Y ist bei diskreten Räumen eben die Mächtigkeit des kleinen Raums bestimmend für die Informationsmenge, die maximal zwischen X und Y ausgetauscht werden kann. Dieses Maximum ist flapsig gesprochen die „Anzahl der Qubits von X“.

¹⁶Für welches Teil wir uns dabei zuerst entscheiden ist egal, was sich leicht zeigen lässt.

Wir entscheiden uns für das Teil X und bilden dessen Dichteoperator durch Ausspuren über Y mit den $\{|\chi_p\rangle\}$

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_X(\Delta t) &= \sum_{ijklmnp} d_i d_j^* e^{-i\Delta\omega_{ij}\Delta t} f_{ikl} f_{jmn}^* |\phi_k\rangle \langle \chi_p | \chi_l \rangle \langle \phi_m | \langle \chi_n | \chi_p \rangle \\ &= \sum_{ijkmp} d_i d_j^* f_{ikp} f_{jmp}^* e^{-i\Delta\omega_{ij}\Delta t} |\phi_k\rangle \langle \phi_m|\end{aligned}\quad (27)$$

also mit den Matrixelementen

$$\rho_{km} = \sum_{ijp} d_i d_j^* f_{ikp} f_{jmp}^* e^{-i\Delta\omega_{ij}\Delta t} \quad (28)$$

Dieser Dichteoperator ist quasiperiodisch mit den Frequenzen $\Delta\omega_{ij}$. Die Entropie erhalten wir durch Spurbildung über den Operator $-\hat{\rho}_X \log_2 \hat{\rho}_X$ mit den $\{|\phi_q\rangle\}$

$$S = - \sum_q \langle \phi_q | \hat{\rho}_X(\Delta t) \log_2 \hat{\rho}_X(\Delta t) | \phi_q \rangle \quad (29)$$

oder gebildet mit den Matrixelementen als

$$S = - \sum_{km} \left(\sum_{ijp} d_i d_j^* f_{ikp} f_{jmp}^* e^{-i\Delta\omega_{ij}\Delta t} \right) \log_2 \left(\sum_{ijp} d_i d_j^* f_{imj} f_{jpk}^* e^{-i\Delta\omega_{ij}\Delta t} \right) \quad (30)$$

Nun können wir sehen, dass wir am Anfang auch einen gemischten Weltzustand hätten zulassen können: an der prinzipiellen Art, wie die Differenzfrequenzen den Dichteoperator treiben, hätte sich nichts geändert.

Im kontinuierlichen Fall geschieht Analoges wie beim Übergang von einer Fourier-Reihe zur Fourier-Transformation: es lassen sich auch aperiodische Funktionen darstellen.

Anhang C: Beispiel zur Schrödingerdynamik der Entropie

Für das einfachstmögliche Beispiel brauchen wir ein Produkt aus 2 Qubits. (23) stellt sich dann dar als

$$|\psi\rangle = (|E_0\rangle |E_1\rangle |E_2\rangle |E_3\rangle) \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Diesen Vektor wollen wir nun gemäß (24) in 2 Qubits teilen.

$$|\psi\rangle = (|\phi_0\rangle |\chi_0\rangle | \phi_0\rangle |\chi_1\rangle | \phi_1\rangle |\chi_0\rangle | \phi_1\rangle |\chi_1\rangle) \cdot \begin{pmatrix} c_{00} \\ c_{01} \\ c_{10} \\ c_{11} \end{pmatrix}$$

Durch Einschreiben einer Einheitsmatrix $f^\dagger f$ erhalten wir

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^3 d_i |E_i\rangle = \sum_{\substack{i=0 \\ jk=00}}^{\substack{11 \\ 3}} d_i f_{jk}^* f_{ijk} |\phi_j\rangle |\chi_k\rangle$$

Für das Beispiel nehmen wir diese unitäre 4x(2x2) Matrix

$$f = \frac{1}{2} \begin{matrix} jk & 00 & 01 & 10 & 11 & i \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & -1 \\ -1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} & 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Die Dichtematrix (28) ist dann eine 2x2 Matrix.

Als Energieeigenwerte E_0 bis E_3 nehmen wir 1, 2, 5 und 7 eV, um 6 verschiedene Differenzfrequenzen zu bekommen. Die Amplituden wählen wir genauso, so dass

$$|\psi\rangle = (|1\rangle |2\rangle |5\rangle |7\rangle) \cdot \frac{1}{\sqrt{79}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

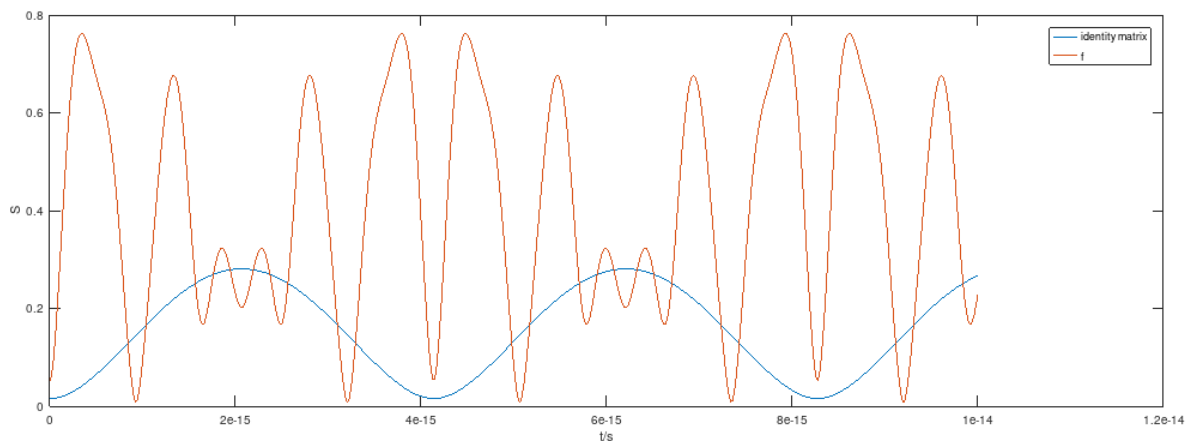


Abbildung 4: Periodische Entropie

Abbildung 4 zeigt den Zeitverlauf der Entropie in der Teilung f . Er ist streng periodisch, da die Verhältnisse der Differenzfrequenzen rationale Zahlen sind. Die Periodendauer beträgt ca. 4,1 Femtosekunden. Als Referenz wurde der Verlauf der Entropie in Originalsicht, d.h. mit der Einheitsmatrix als f , in die Grafik mit aufgenommen (blau).

Wenn die Verhältnisse der Differenzfrequenzen nicht mehr alle rationale Zahlen sind, dann wird der Zeitverlauf quasiperiodisch. Für Abbildung 5 wurde der Energieeigenwert 7 durch $2,6 \cdot e$ ersetzt.

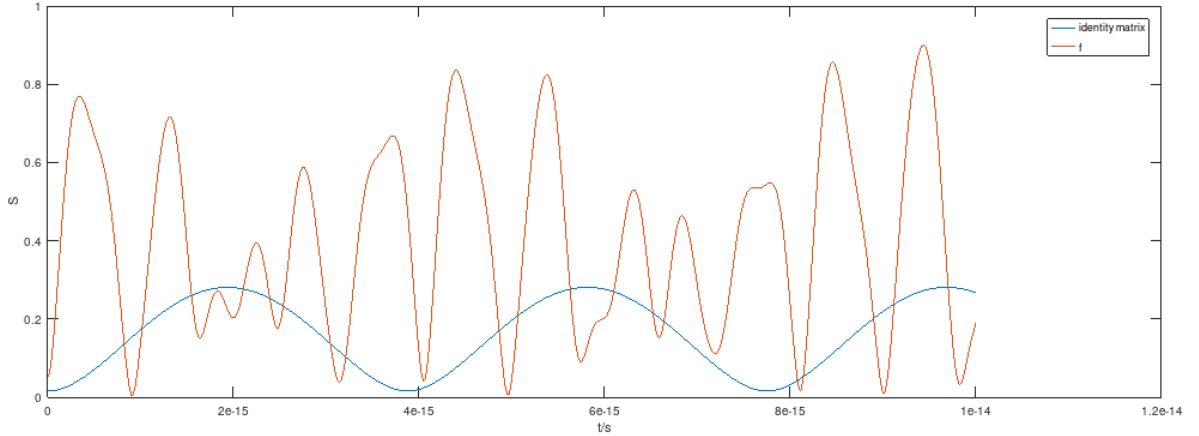


Abbildung 5: Quasiperiodische Entropie

Anhang D: Matrixelemente zweier Lorentz-Boosts

Eigentlich ist es klar, was bei der Verkettung der beiden Transformationen herauskommen muss. Es sei für dieses Beispiel dennoch einmal explizit aufgeschrieben.

(18) eingesetzt in (19) ergibt

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{\beta_3}(t', x', t, x) &= \\
 \int dt'' dx'' \delta(t'' - \gamma_2(t' + \beta_2 x')) \delta(x'' - \gamma_2(x' + \beta_2 t')) \delta(t - \gamma_1(t'' + \beta_1 x'')) \delta(x - \gamma_1(x'' + \beta_1 t'')) &= \\
 \int dx'' \delta(x'' - \gamma_2(x' + \beta_2 t')) \delta(t - \gamma_1(\gamma_2(t' + \beta_2 x') + \beta_1 x'')) \delta(x - \gamma_1(x'' + \beta_1 \gamma_2(t' + \beta_2 x'))) &= \\
 \delta(t - \gamma_1(\gamma_2(t' + \beta_2 x') + \beta_1 \gamma_2(x' + \beta_2 t'))) \delta(x - \gamma_1(\gamma_2(x' + \beta_2 t') + \beta_1 \gamma_2(t' + \beta_2 x'))) &= \\
 \delta(t - \gamma_1 \gamma_2 ((1 + \beta_1 \beta_2) t' + (\beta_1 + \beta_2) x')) \delta(x - \gamma_1 \gamma_2 ((1 + \beta_1 \beta_2) x' + (\beta_1 + \beta_2) t')) &= \\
 \delta\left(t - \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \left(t' + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{(1 + \beta_1 \beta_2)} x'\right)\right) \delta\left(x - \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \left(x' + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{(1 + \beta_1 \beta_2)} t'\right)\right) &
 \end{aligned}$$

was wieder von der Form (18) ist mit der relativistischen Addition von Relativgeschwindigkeiten.

$$\beta_3 = \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{(1 + \beta_1 \beta_2)} \quad \gamma_3 = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2)$$

Anhang E: Gnu Octave Programme

Quantenuhr aus 2 Qutrits

```
alpha_0=pi/6;
alpha_1=pi/5;

a_0_abs=sin(alpha_0+alpha_1)/sin(alpha_1-2*alpha_0)
a_1_abs=sin(alpha_0+alpha_1)/sin(alpha_0-2*alpha_1)
a_2_abs=1

a_0=a_0_abs*e^(i*alpha_0);
a_1=a_1_abs*e^(i*alpha_1);
a_2=a_2_abs;

% normalization
N=1/sqrt(a_0_abs^2+a_1_abs^2+a_2_abs^2);

% normalized orthogonal row vectors
u_0=[a_0,a_2,a_1]*N;
u_1=[a_1,a_0,a_2]*N;
u_2=[a_2,a_1,a_0]*N;

% check normalization
u_abs_square=u_0*u_0'

% check orthogonality
u_0_u_1=u_0*u_1'
u_1_u_2=u_1*u_2'
u_2_u_3=u_2*u_0'

% unitary matrix
U=[
u_0;
u_1;
u_2;
]

% null matrix
Null=U-U

% unistochastic matrix
P=[
[Null,U' .*conj(U')];
[U .*conj(U),Null];
]
```

```

% one clock tick
P_square=P*P

% external initial states
psi_0=[1,0,0,0,0,0]';
psi_1=[0,1,0,0,0,0]';
psi_2=[0,0,1,0,0,0]';

% time eigenvalues
t=[0,1,2,0,0,0];

% expectation values
exp_t_0 = t*P_square*psi_0
exp_t_1 = t*P_square*psi_1
exp_t_2 = t*P_square*psi_2

% entropy increase with clock ticks
p_1_tick=P_square*psi_0
p_2_ticks=P_square^2*psi_0
p_3_ticks=P_square^3*psi_0

```

Schrödingerdynamik Entropie

```

# Time evolution of the von Neumann entropy of a 1 qubit density matrix
# according to Schrödinger dynamics.

# example one: energy ratios are rational numbers -> periodic entropy
energies=[1,2,5,7]; # eV

# example two: irrational energy ratios -> quasi periodic entropy
energies2=[1,2,5,2.6*e]; # eV, 1 non-rational number

# example amplitudes of our state vector in energy representation
amplitudes=[1,2,5,7];
# normalize |psi>
amplitudes*=1/sqrt(amplitudes*amplitudes');

# example unitary matrix f, defines the split of the 2 qubit space
f=0.5*[
    1,0,1,sqrt(2);
    sqrt(2),1,0,-1;
    -1,sqrt(2),1,0;
    0,-1,sqrt(2),-1
];
# check unitarity of f
identity=f*f'

```

```

# Planck's constant over 2 pi in eV*s units.
function retval = hbar()
    retval = 6.582119569e-16;
endfunction

# period length of periodic example one
# 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6 -> 1/1 common period
printf("period is %10.3e seconds\n",2*pi*hbar);

# von Neumann entropy of a density matrix with base 2 logarithm
function retval = entropy(matrix)
    retval = -trace(matrix*logm(matrix))*log2(e);
endfunction

#pure_state_density_matrix=amplitudes'*amplitudes
#S=entropy(pure_state_density_matrix)

# Calculates 2x2 density matrix of state |psi> in a 2 qubit space
# depending on the view defined by unitary matrix f and the time.
# f is meant relative to the energy representation.
#
# E_4 vector with 4 energy eigenvalues
# d_4 amplitudes of energy eigenvectors
# (|psi> = sum of d_i * |E_i>)
# f_4_4 4x4 transformation matrix to 2x2 split view
# t time scalar value
function ret = rho_4_4(E_4, d_4, f_4_4, t)
    ret = [0,0;0,0];
    f_adjugate = f_4_4';
    for k_ = 1:2
        for m_ = 1:2
            for i_ = 1:4
                for j_ = 1:4
                    omega_ij = (E_4(i_)-E_4(j_))/hbar;
                    exp_ij = exp(-i*omega_ij*t);
                    for p_ = 1:2
                        index_f = (k_-1)*2+(p_-1)+1;
                        index_f_adj = (m_-1)*2+(p_-1)+1;
                        ret(k_,m_) +=
                            d_4(i_)*d_4(j_)*f_4_4(i_,index_f)*f_adjugate(index_f_adj,j_)*exp_ij;
                    endfor
                endfor
            endfor
        endfor
    endfor
endfunction

```

```

N_points=500;
t=linspace(0,10.0e-15,N_points); # femto seconds 1e-15
S1=S2=S3=S4=linspace(0,0,N_points);
for t_ = 1:N_points
    rho = rho_4_4(energies, amplitudes, identity, t(t_));
    S = entropy(rho);
    S1(t_) = real(S);
    rho = rho_4_4(energies, amplitudes, f, t(t_));
    #trc=trace(rho) # must be 1
    #trc_square=trace(rho*rho); # must be less or equal 1
    S = entropy(rho);
    S2(t_) = real(S); # suppress imaginary part (numeric errors < 1e-15)
    rho = rho_4_4(energies2, amplitudes, identity, t(t_));
    S = entropy(rho);
    S3(t_) = real(S);
    rho = rho_4_4(energies2, amplitudes, f, t(t_));
    S = entropy(rho);
    S4(t_) = real(S);
endfor
hf=figure(1, 'position', [110 400 1200 400]);
h=plot(t,S1,"-;identity matrix;",t,S2,"-;f;");
xlabel("t/s");
ylabel("S");
print (hf, "periodic_entropy.png", "-dpng","-S1200,400");
hf=figure(2, 'position', [110 40 1200 400]);
h=plot(t,S3,"-;identity matrix;",t,S4,"-;f;");
xlabel("t/s");
ylabel("S");
print (hf, "quasi_periodic_entropy.png", "-dpng","-S1200,400");

```